

Контрольні запитання до курсу «Методи математичної фізики» 5.

1. Знайдіть необхідну умову екстремуму функціоналу

$$J[z] = \iint_D F\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\right) dx dy$$

у класі функцій, що визначені і диференційовані у області D площини XOY і приймають задані значення на її кусково-гладкій межі Γ .

2. Знайдіть граничну умову на межі Γ області D площини XOY , якій має задовольняти функція $z(x, y)$, що надає екстремум функціоналу

$$J[z] = \iint_D F(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)) dx dy + \int_{\Gamma} f(z(x, y)) dl,$$

де $f(z)$ - гладка функція.

3. Знайдіть функцію Лагранжа натягнутої струни з закріпленими кінцями.
4. Знайдіть функцію Лагранжа однорідного стержня з закріпленими кінцями.
5. Знайдіть рівняння коливань натягнутої струни з закріпленими кінцями.
6. Знайдіть граничні умови на пружно закріплених кінцях струни.
7. Поставте задачу Коші для вільних коливань струни з пружно закріпленими кінцями.
8. Skorиставшись методом відбиття знайдіть загальний розв'язок задачі Коші для вільних коливань напівнескінченої однорідної струни з лівим закріпленим кінцем.
9. Skorиставшись методом відбиття опишіть алгоритм розв'язку задачі Коші для вільних коливань однорідної струни з закріпленими кінцями.
10. Знайдіть загальний розв'язок задачі Коші для вільних коливань однорідної струни з закріпленими кінцями, скориставшись результатами теорії рядів Фур'є.
11. Виразіть енергію вільних коливань струни через початкові функції і знайдіть частку енергії, яка припадає на кожне власне коливання.
12. Знайдіть частоти згасаючих власних коливань струни з закріпленими кінцями з урахуванням тертя.

Контрольні запитання до курсу «Методи математичної фізики» 6.

1. Знайдіть частинний розв'язок задачі Коші про вимушені коливання обмеженої струни під дією зовнішньої сили при нульових початкових умовах.
2. Запишіть часову функцію Гріна для задачі про вимушені коливання обмеженої струни під дією зовнішньої сили у вигляді розкладу за власними функціями. Який зміст має ця функція?
3. Знайдіть амплітуду усталених коливань обмеженої струни під дією гармонічної сили. Запишіть частотну функцію Гріна для цієї задачі у вигляді розкладу за власними функціями. Який зміст має ця функція?
4. Знайдіть частотну функцію Гріна для задачі про вимушені коливання струни під дією гармонічної сили як певний розв'язок рівняння Штурма-Ліувілля.
5. Доведіть додатність власних значень крайової задачі Штурма-Ліувілля.
6. Доведіть, що власні функції крайової задачі Штурма-Ліувілля, які відповідають різним власним значенням, ортогональні.
7. З'ясуйте екстремальний зміст найменшого власного значення крайової задачі Штурма-Ліувілля.
8. Доведіть, що власна функція, що відповідає найменшому власному значенню крайової задачі Штурма-Ліувілля, не має вузлів.
9. З'ясуйте екстремальний зміст другого та вищих власних значень крайової задачі Штурма-Ліувілля. Яку властивість відносно наявності вузлів мають відповідні власні функції?
10. Сформулюйте теорему про *mini-max*. Які наслідки випливають з цієї теореми щодо руху власних частот при змінах жорсткості та мас коливальної системи? Як зростають послідовні власні частоти ω_n неоднорідної струни із зростанням n ?
11. Виведіть нерівність Бесселя для ортогональних розкладів. Поясніть у яких випадках ця нерівність переходить у рівність Парсеваля.
12. Доведіть повноту системи власних функцій крайової задачі Штурма-Ліувілля.
13. Знайдіть власні частоти та відповідні власні функції для прямокутної мембрани з закріпленими краями.
14. Поставте задачу Коші про коливання мембрани з закріпленими кінцями і запишіть її загальний розв'язок.
15. Доведіть додатність власних значень для коливань мембрани з закріпленими кінцями.
16. Покажіть, як трьохвимірні задачі для сферично симетричних розв'язків зводяться для одновимірних.
17. Поставте задачу Коші про охолодження рівномірно нагрітої однорідної кулі і запишіть її розв'язок.
18. Знайдіть критичний радіус сферичного реактора.